MODELLO DI VOLTERRA-LOTKA IN N DIMENSIONI (N QUALSIASI)

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i \left(K_i - \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} x_j \right)$$

x_i : POPOLAZIONE DELLA SPECIE i $(i=1,2,\dots,N)$

α_i : TASSO DI CRESCITA

K_i : FUNZIONE DELLA CAPACITA' DI CARICO PER LA SPECIE i

β_{ij} : COEFFICIENTI DI COMPETIZIONE FRA LE SPECIE i E j.

MODELLO DI VOLTERRA-LOTKA APPLICATO NELL'AMBITO DELLE SCIENZE URBANE E REGIONALI

PREDA $\longleftrightarrow$ REDDITO MEDIO DISPONIBILE NELLA MACROAREA STUDIATA $\longleftrightarrow$ OFFERTA

PREDATORE $\longleftrightarrow$ POPOLAZIONE NELLA MACROAREA STUDIATA $\longleftrightarrow$ DOMANDA

IN SINTESI: LA POPOLAZIONE "CACCIA" IL REDDITO

OPPURE

INTERAZIONI DINAMICHE FRA DOMANDA (IL PREDATORE) E OFFERTA (LA PREDA)

MODELLI ANALITICI DEI DETRITI SPAZIALI IN ORBITA BASSA TERRESTRE

OGGETTI GRANDI: SATELLITI $\longleftrightarrow$ PREDA

OGGETTI PICCOLI: FRAMMENTI $\longleftrightarrow$ PREDATORE

MODELLO SEMPLICE PER L'EVOLUZIONE NEL TEMPO DI TUTTI I CORPI IN ORBITA

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = A + BN + CN^2}$$

N = numero di oggetti in orbita

è legato al numero ed al tipo di lanci dei razzi

A = coefficiente di "deposizione" (è "modellato" in modo articolato, con vari "sotto-coefficienti" sperimentali)

B = coefficiente di "rimozione" (è "modellato" così:

$B = B_{atm} + S$, con $\begin{cases} B_{atm} = \text{frazione dei corpi che rientrano per cause naturali (atmosfera residua)} \sim 5.6\times10^{-3} \\ S = \text{frazione dei corpi che rientrano mediante sistemi attivi di rimozione} \sim 0 \end{cases}$

N.B.: si potrebbe anche scrivere $-BN$ subito!

C = coefficiente di "collisione" (è "modellato" in modo complesso, sia mediante considerazioni teoriche - teoria cinetica dei gas -, sia mediante dati sperimentali)

MODELLO PER L'EVOLUZIONE NEL TEMPO DI DUE POPOLAZIONI DI CORPI NELLO SPAZIO (I SATELLITI -S- (oggetti grandi) ED I FRAMMENTI -F (oggetti piccoli))

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dN_S}{dt} = A_S - B_S N_S - C_{S1} N_S^2 - C_{S2} N_S N_F \\ \dfrac{dN_F}{dt} = A_F - B_F N_F + C_{F1} N_S^2 + C_{F2} N_S N_F + C_{F3} N_F^2 \end{cases}}$$

Si può pensare in questo caso il problema come una interazione tra due popolazioni di animali che sono però cannibali, cioè si possono autodistruggere, popolazioni soggette entrambe a "caccia" e ripopolamento da parte di un agente esterno.

Le due popolazioni possono essere viste l'una come i satelliti "preda" e l'altra come i frammenti "predatori".

In questo caso i satelliti-preda sono quelli più grandi di una certa soglia, e sono predati dai frammenti-predatori che sono più piccoli. Le specie sono però cannibali, ci può essere cioè interazione tra elementi della stessa specie: i frammenti hanno come prede non solo i satelliti più grandi, ma anche loro stessi e a loro volta i satelliti grandi possono distruggere un loro "simile" ma non un frammento. Tutte e due le specie inoltre sono soggette alla "caccia" da parte dell'atmosfera terrestre che agisce su entrambe le specie; è poi presente un termine di deposizione in entrambe le equazioni delle specie che dipenderà dall'attività umana di lancio in orbita.

MODELLO EPIDEMIOLOGICO (KERMACK, McKENDRICK: 1927)

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} = -KSI & , S(0)=S_0>0 \\[2ex]
\dfrac{dI}{dt} = KSI - hI & , I(0)=I_0>0 \\[2ex]
\dfrac{dR}{dt} = hI & , R(0)=R_0>0
\end{cases}
$$

IPOTESI:

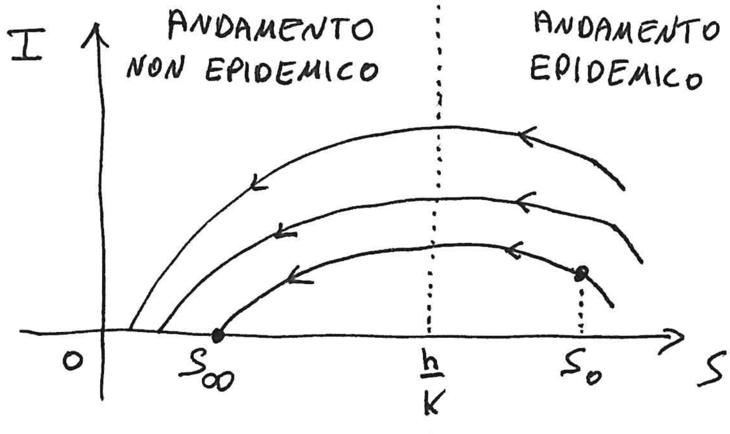
1) il contagiato diviene subito un infettivo;
2) la malattia conferisce immunità;
3) $N = S+I+R =$ costante, cioè si trascurano le nascite, le morti per altre cause ed i flussi migratori.

Le prime 2 eqz. non dipendono da R: allora possono essere risolte separatamente, dividendo ad esempio la seconda per la prima (si suppone che S e I siano $\neq 0$):

$$\frac{dI}{dS} = \frac{I(KS-h)}{-KSI} \Rightarrow \frac{dI}{dS} = -1 + \frac{h}{KS} \Rightarrow dI = \left[-1+\frac{h}{KS}\right]dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(S) = -S + \frac{h}{K}\log S + c \qquad \begin{cases} \text{con le C.I.: } I_0 = -S_0 + \frac{h}{K}\log S_0 + c \Rightarrow \\ \Rightarrow c = I_0 + S_0 - \frac{h}{K}\log S_0 \end{cases}$$

In definitiva si ottiene il seguente andamento:



$\boxed{S_0 < \frac{h}{K}}$ ← VALORE DI SOGLIA ($I(S)$ ha il max) → $\boxed{S_0 > \frac{h}{K}}$

DIFFUSIONE NON EPIDEMICA — DIFFUSIONE EPIDEMICA

Notiamo che:

$\frac{dI}{dt} > 0$ se $I(KS-h)>0$, cioè, se

$$KS-h>0 \Rightarrow S > \frac{h}{K}$$

In altri termini, si parla di andamento o diffusione epidemica se $I(t)$ è crescente; se, invece, $I(t)$ è decrescente, allora abbiamo

→ (non ci sia) (cioè, un andamento epidemico della malattia infettiva)

Perché ci sia un'infezione deve accadere che

$$S_0 > \frac{h}{K} \Rightarrow \boxed{S_0 \frac{K}{h}} > 1 \Rightarrow R_0 > 1$$

$$\rightarrow \left(S_0 < \frac{h}{K} \Rightarrow R_0 < 1 \right)$$

definiamo queste quantità:

$R_0 = S_0 \frac{K}{h}$ { BASIC REPRODUCTION NUMBER

↓

numero di riproduzione netto della malattia

↓

tasso riproduttivo della infezione nella popolazione

↓

è un indicatore del massimo potenziale di diffusione della malattia

↓

N.B.: nel foglio 3 viene spiegato.

questo numero, in pratica, rappresenta in media quanti individui può infettare ogni contagiato: ad esempio

	"PRISMA" ARTICOLO	BOOK BARNES FULFOR
INFEZIONE	R_0	R_0
VAIOLO	5-7	4
MORBILLO e PERTOSSE (BOOK)	12-18	16-18
INFLUENZA (UN CEPPO)	2	3-4
PAROTITE ("ORECCHIONI")	4	
VARICELLA		10-12

Notiamo che R_0 può essere stimato (si veda la tabella) e queste stime si riferiscono ad una popolazione naive di copertura vaccinale.

Se però noi vacciniamo una parte p della popolazione (cioè, una "proporzione" p, minore di 1, della popolazione: ad esempio, se $p = 0.3$ questo significa che viene vaccinato il 30% della popolazione), questo modifica S_0 che diventa $(1-p)S_0$. Allora, in questo caso, cioè vaccinando una parte p della popolazione (da definire) non avremo un'epidemia se

frazione di persone vaccinate

$$(1-p)S_0 < \frac{h}{K} \Rightarrow (1-p)S_0\frac{K}{h} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-p)R_0} < 1 \Rightarrow R_V < 1$$

{ è la condizione per eliminare l'infezione, cioè per non far "dilagare" la malattia

→ definiamo questa quantità R_V: numero di riproduzione effettivo (REAL REPRODUCTION NUMBER)

↓

allora, dato che noi conosciamo sulla base di dati sperimentali (pre-vaccination era) i valori di R_0, possiamo stimare la copertura vaccinale necessaria per eliminare l'infezione:

L'ATTRATTORE DI LORENZ (1917 - 2008)

IL TESTO E' TRATTO DA: G.BORGIOLI, "MODELLI MATEMATICI DI EVOLUZIONE ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI", pp. 86-88, Ed. CELID, 1996.

Concludiamo questo capitolo, accennando al modello matematico sicuramente più celebre fra quanti, in dinamica non lineare, manifestano comportamenti caotici. Questo modello, dovuto a E.N.Lorenz (1963), è costituito da un semplice sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine, autonome, che presentano non linearità di tipo quadratico (come, ad esempio, nel modello preda-predatore). Il fenomeno fisico descritto è quello della convezione termica di un fluido incompressibile, viscoso, in una regione piana (cella) rettangolare, disposta verticalmente (Fig.4.19).

Il sistema di equazioni ordinarie è ottenuto a partire dal modello "esatto", costituito da un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali (equazioni di Navier-Stokes), dove le incognite sono il campo di velocità del fluido, la temperatura, etc.. , sviluppando le funzioni incognite in serie di Fourier e troncando la serie.

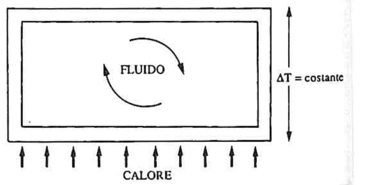


Fig.4.19

Le equazioni a derivate parziali si trasformano in equazioni ordinarie, dove le nuove incognite sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier fino all'ordine considerato. Il fatto di trascurare i termini (infiniti) successivi ad un certo ordine è legato all'aspettativa che la soluzione (eventualmente dopo un periodo

transitorio) oscilli solo secondo alcuni modi di vibrazione, essendo gli altri sostanzialmente trascurabili. Il modello di Lorenz ha la forma seguente:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma(X-Y) \\ \dot{Y} = RX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad ; \quad . \tag{4.29}$$

X è il coefficiente del primo termine dello sviluppo della corrente (funzione scalare, che nell'ipotesi di un sistema piano, invariante rispetto alla terza coordinata spaziale, sostituisce il campo vettoriale di velocità); Y è il primo coefficiente nello sviluppo della temperatura e Z descrive l'andamento verticale della temperatura stessa; i coefficienti σ (numero di Prandtl) e R (numero di Reynolds adimensionale) caratterizzano le proprietà fisiche del fluido, mentre b è legato alle caratteristiche geometriche della cella. Nelle aspettative di Lorenz (e di chi lo aveva preceduto nell'opera di ottenere modelli approssimati dalle equazioni di Navier-Stokes) la (4.29) doveva costituire un modello "semplice" per lo studio dei moti convettivi nell'atmosfera e, quindi, un passo importante sulla strada da percorrere per avere previsioni del tempo "deterministiche".

Per un'analisi approfondita delle proprietà del sistema (4.29) rimandiamo a [22, Cap.11], limitandoci qui a segnalare che, oltre alla soluzione di equilibrio (0,0,0), si possono facilmente determinare altre due soluzioni di equilibrio e, fissati σ e b, si possono studiare le rispettive proprietà di stabilità al variare di R (valori crescenti di R indicano, ad esempio, un gradiente termico crescente fra le due facce orizzontali della cella e, quindi, un notevole flusso convettivo). Per valori di $R \simeq 28$ tutte le soluzioni di equilibrio sono instabili e, per tutte le soluzioni di evoluzione considerate, si è osservata un'estrema sensibilità rispetto ai dati iniziali (si allontanano esponenzialmente l'una dall'altra). Tuttavia, per tutte le condizioni iniziali prese in esame, l'evoluzione porta asintoticamente verso una regione invariante dello spazio delle fasi (X,Y,Z), dalla struttura geometrica estremamente complessa (cosidetta **frattale**), che è stata identificata come l'**attrattore caotico di Lorenz** (detto "ad ali di farfalla" per la sua forma). Le conseguenze di questo risultato sulla possibilità di predire uno stato successivo del sistema, con una precisione prefissata, sono alquanto catastrofiche, poiché, come detto, l'incertezza (ovvero l'errore di misura) sullo stato iniziale si propaga, con crescita esponenziale nel tempo, sugli stati successivi. Le implicazioni di ciò

AD ESEMPIO:
$R=28$
$\sigma=10$
$b=\frac{8}{3}$
OPPURE
$R=15$
$\sigma=5$
$b=1$

sulle previsioni del tempo, assumendo che la reale turbolenza dell'aria abbia la stessa sensibilità ai valori iniziali, sono state discusse da Lorenz in lavori del 1963 e 1964. In Fig.4.20 riportiamo la proiezione dell'attrattore sul piano (X,Y) realizzata con PHASER, [14].

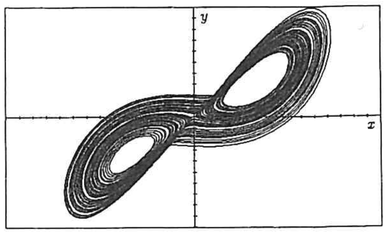
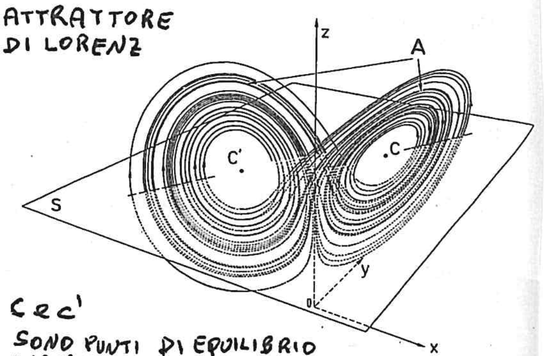


Fig.4.20

Riassumiamo alcuni aspetti caratterizzanti i sistemi di equazioni differenziali non lineari, ricordando, prima di tutto, che, in generale, non è possibile ottenere esplicitamente (ovvero in termini di funzioni elementari) la soluzione di un PVI per un sistema non lineare. Una volta appurata l'esistenza ed unicità della soluzione (vedi Cap.5) lo studio di tipo qualitativo, sia con metodi matematici rigorosi, sia mediante simulazioni numeriche, diventa quindi l'unico approccio possibile per conoscerne le proprietà. Fra le caratteristiche più interessanti, rilevabili già per sistemi a dimensione 2, ricordiamo la possibilità di avere soluzioni periodiche asintotiche (cicli limite) anche per sistemi non forzati (equazione di Van der Pol). Le soluzioni di tipo caotico possono presentarsi a partire dalla dimensione 3 (equazione del pendolo forzato, equazione di Duffing, modello di Lorenz). Abbiamo voluto presentare, in modo sommario e del tutto fenomenologico, anche questo aspetto della dinamica non lineare, divenuto di gran moda in tempi recenti, per completarne, in qualche modo, il quadro. Al riguardo osserviamo come, in sistemi completamente deterministici (ad ogni possibile dato iniziale corrisponde una ed una sola soluzione), si abbia, di fatto, la crisi di tale determinismo quando siano presenti soluzioni caotiche: l'errore di misura commesso sulle condizioni iniziali si propaga con grande rapidità e non è possibile fare previsioni certe sullo stato del sistema per tempi lunghi.

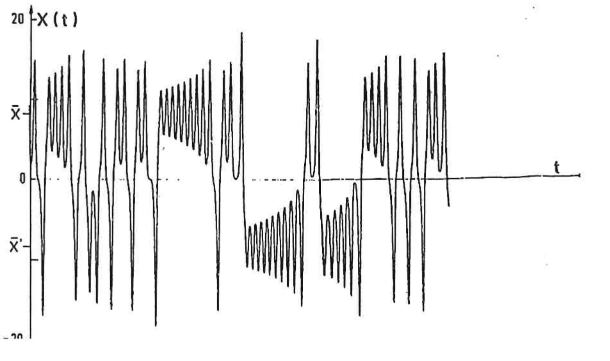
ATTRATTORE DI LORENZ



C e C' SONO PUNTI DI EQUILIBRIO INSTABILI

← FIGURE TRATTE DA A. VULPIANI, "DETERMINISMO E CAOS", ED. CAROCCI 2004.

$x(t)$ in funzione di t per il modello di Lorenz con $\sigma = 10$, $b = 8/3$ ed $r = 28$



Partial Differential Equations: PDEs

PDEs $\Rightarrow$ infinite soluzioni

PDEs + condizioni complementari $\Rightarrow$ una sola soluzione
(sotto condizioni di regolarità per le funzioni incognite)

condizioni complementari

condizioni iniziali + condizioni al contorno
per le equazioni iperboliche e paraboliche
(i.e., diffusion equation, wave equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x,t)$$

condizioni al contorno
per le equazioni ellittiche
(i.e., Poisson equation and Laplace equation)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x,y) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x,y) = 0$$

Partial Differential Equations: PDEs

condizioni iniziali + condizioni al contorno

per le equazioni iperboliche e paraboliche

(i.e., diffusion equation, wave equation)

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)=\frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)$$

Nasce da un bilancio termico, se *T* è la temperatura, e si chiama anche heat equation o Fourier's equation.
Se T è la concentrazione, descrive la diffusione di una sostanza diluita (gas o liquido) in una fase disperdente omogenea: è il caso tipico delle soluzioni. Allora si chiama Fick's equation ed al posto della diffusività termica ($k/(\rho c)$) c'è la diffusività di massa.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}A(x,t)=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}A(x,t)$$

Rappresenta fenomeni vibratori, onde che si propagano. Fu trovata da D'Alambert per le corde vibranti. Descrive onde trasversali di piccola ampiezza in una corda, in una membrana elastica, onde sonore ed anche onde elettromagnetiche nel vuoto.

Partial Differential Equations: PDEs

condizioni al contorno

per le equazioni ellittiche

(i.e., Poisson equation and Laplace equation)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(x,y)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y)$$

Rappresenta la versione non omogenea dell'equazione di Laplace. Può descrivere una membrana su cui agisce una densità di forza, un campo termico con sorgente, un campo elettrico in presenza di una densità di carica (è importante in vari problemi di elettrostatica, come pure la sua versione omogenea).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(x,y)=0$$

Si chiama anche equazione del Potenziale. Può fornire soluzioni statiche (stazionarie: la soluzione non dipende più dal tempo) dell'equazione di D'Alambert o dell'equazione del calore. Può descrivere campi termici stazionari, problemi di elettrostatica piana, moti piani di fluidi perfetti incomprimibili.

Variabile Casuale (Aleatoria)

Definizioni, osservazioni e principali proprietà

VARIABILE CASUALE (ALEATORIA)

→ UNA PRIMA DEFINIZIONE:

$$X : S \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$$

- A insieme finito o infinito numerabile $\Rightarrow$ $\boxed{\text{V.a. DISCRETA}}$
- A insieme continuo $\Rightarrow$ $\boxed{\text{V.a. CONTINUA}}$

→ V.a. DISCRETA: $P(X=x) = f(x)$ FUNZIONE DI PROBABILITA'

$$\begin{cases} f(x_i) \geq 0 \\ \sum_i f(x_i) = 1 \end{cases}$$

$P(X \leq x) = F(x)$ FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

$F(x)$ si chiama anche funzione di ripartizione della v.a. X (si usa la notazione $X \sim F$) ed esprime la probabilità che X assuma un valore $\leq x$.
Questa definizione vale anche per v.a. continue. Si noti che tutte le questioni di probabilità inerenti ad una v.a. ammettono una risposta in termini della sua F.

Definizione

Una variabile aleatoria è dunque un numero che viene assegnato, mediante una determinata regola, a ciascun punto dello spazio campione, ovvero a ciascuno degli esiti possibili di un esperimento aleatorio.

INDICI CARATTERISTICI DI UNA VARIABILE CASUALE

E' UN INDICE DI POSIZIONE (rappresenta il valore previsto che si potrà ottenere in un gran numero di prove)

VALORE ATTESO (MEDIO)

(Expectation o Expected Value)

SI DEFINISCE ANCHE: ASPETTAZIONE o MEDIA o SPERANZA MATEMATICA

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum_i x_i f(x_i) & \text{se v.a. DISCRETA} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx & \text{se v.a. CONTINUA} \end{cases}$$

$E(X)$ può essere $\gtrless 0$

Si definisce spesso con μ

(nella teoria delle misure μ è detto VALORE DI MISURA)

→ dove X v.a. è una misura di un parametro fisico

E' UN INDICE DI VARIABILITA' (indica quanto sono "dispersi" i valori della v.a. relativamente al suo valor medio)

VARIANZA

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i) & \text{se v.a. DISCRETA} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx & \text{se v.a. CONTINUA} \end{cases}$$

$Var(X)$ può essere ≥ 0

N.B.:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

DEVIAZIONE STANDARD DELLA v.a. X ⇒ SCARTO QUADRATICO MEDIO ⇒ Nella teoria delle misure σ è detto INCERTEZZA DELLA MISURA

NOTIAMO CHE:

→ $Var(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$

→ $Var(X) = E(X^2) - \mu^2$ ovvero $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

→ $Var(aX) = a^2 Var(X)$