

# MODELLO DI VOLTERRA-LOTKA IN N DIMENSIONI (N QUALSIASI)

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i \left( K_i - \sum_{j=1}^N \beta_{ij} x_j \right)$$

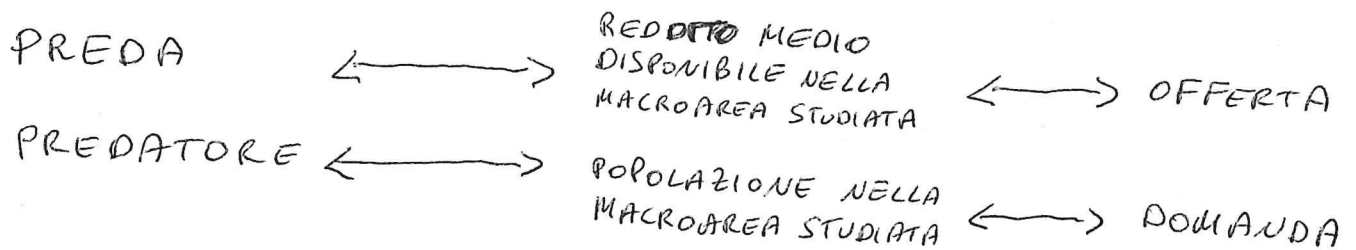
$x_i$  : POPOLAZIONE DELLA SPECIE  $i$  ( $i=1,2,\dots,N$ )

$\alpha_i$  : TASSO DI CRESCITA

$K_i$  : FUNZIONE DELLA CAPACITA' DI CARICO  
PER LA SPECIE  $i$

$\beta_{ij}$  : COEFFICIENTI DI COMPETIZIONE FRA  
LE SPECIE  $i$  E  $j$ .

## MODELLO DI VOLTERRA-LOTKA APPLICATO NELL'AMBITO DELLE SCIENZE URBANE E REGIONALI



IN SINTESI: LA POPOLAZIONE "CACCIA" IL REDDITO  
OPPURE  
INTERAZIONI DINAMICHE FRA  
DOMANDA (IL PREDATORE) E OFFERTA (LA PREDA)

MODELLI ANALITICI DEI DETRITI SPAZIALI IN  
ORBITA BASSA TERRESTRE

OGGETTI GRANDI: SATELLITI  $\longleftrightarrow$  PREDA

OGGETTI PICCOLI: EDIFICI  $\longleftrightarrow$  PREDATORE

# THE LOTKA-VOLTERRA MODEL IN N DIMENSIONS (for any N)

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i \left( k_i - \sum_{j=1}^N \beta_{ij} x_j \right)$$

$x_i$  : Species  $i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) population

$\alpha_i$  : Growth rate

$k_i$  : Carrying Capacity function for species  $i$

.....

$\beta_{ij}$  : Competition coefficients between species  $i$  and  $j$

## LOTKA-VOLTERRA MODEL APPLIED TO URBAN AND REGIONAL SCIENCES

Prey  $\leftrightarrow$  average income of studied micro area  $\leftrightarrow$  supply

Predator  $\leftrightarrow$  population of studied micro area  $\leftrightarrow$  demand

In sum: the population “catches” the average income

or

there are dynamical interactions between demand  
(predator) and supply (prey)

## ANALYTICAL MODELS OF SPACE DEBRIS IN LOW EARTH ORBIT

Big objects: satellites  $\leftrightarrow$  prey

Small objects: debris  $\leftrightarrow$  predator

# MODELLO SEMPLICE PER L'EVOLUZIONE NEL TEMPO DI TUTTI I CORPI IN ORBITA

$$\frac{dN}{dt} = A + BN + CN^2$$

$N$  = numero di oggetti in orbita

$A$  = coefficiente di "deposizione" (è "modellato" in modo articolato, con vari "sotto-coefficienti" sperimentali)

$B$  = coefficiente di "rimozione" (è "modellato" con:

$$B = B_{\text{atm}} + S, \text{ con } \begin{cases} B_{\text{atm}} = \text{frazione dei corpi che rientrano per cause naturali (atmosfera residua)} \approx 5.6 \times 10^{-3} \\ S = \text{frazione dei corpi che rientrano mediante sistemi attivi di rimozione} \approx 0 \end{cases}$$

N.B.: si potrebbe anche scrivere  $-BN_{\text{orbita}}$ !

$C$  = coefficiente di "collisione" (è "modellato" in modo complesso, sia mediante considerazioni teoriche - teoria cinetica dei gas -, sia mediante dati sperimentali)

è legato al numero ed al tipo di lanci dei razzi

# MODELLO PER L'EVOLUZIONE NEL TEMPO DI DUE POPOLAZIONI DI CORPI NELLO SPAZIO (I SATELLITI -S- ED I FRAMMENTI -F)

(oggetti grandi)

(oggetti piccoli)

$$\begin{cases} \frac{dN_S}{dt} = A_S - B_S N_S - C_{S1} N_S^2 - C_{S2} N_S N_F \\ \frac{dN_F}{dt} = A_F - B_F N_F + C_{F1} N_S^2 + C_{F2} N_S N_F + C_{F3} N_F^2 \end{cases}$$

Si può pensare in questo caso il problema come una interazione tra due popolazioni di animali che sono però cannibali, cioè si possono autodistruggere, popolazioni soggette entrambe a "caccia" e ripopolamento da parte di un agente esterno.

Le due popolazioni possono essere viste l'una come i satelliti "preda" e l'altra come i frammenti "predatori".

In questo caso i satelliti-preda sono quelli più grandi di una certa soglia, e sono predati dai frammenti-predatori che sono più piccoli. Le specie sono però cannibali, ci può essere cioè interazione tra elementi della stessa specie: i frammenti hanno come prede non solo i satelliti più grandi, ma anche loro stessi e a loro volta i satelliti grandi possono distruggere un loro "simile" ma non un frammento. Tutte e due le specie inoltre sono soggette alla "caccia" da parte dell'atmosfera terrestre che agisce su entrambe le specie; è poi presente un termine di deposizione in entrambe le equazioni delle specie che dipenderà dall'attività umana di lancio in orbita.

# SIMPLE MODEL FOR THE EVOLUTION OVER TIME OF ALL ORBITING BODIES

$$\frac{dN}{dt} = A + BN + CN^2$$

N = number of orbiting bodies

A = “deposition” coefficient (it is articulately “modelled”, with a series of experimental “sub-coefficients”. It is connected to the number and type of rocket launches)

B = “removal” coefficient (it is “modelled” as follows):

B =  $B_{atm} + S$ , with

<p><b>N.B.</b> one could also immediately write - BN !</p>	}	$B_{atm}$ =	fraction of bodies that fall under natural causes (residual atmosphere)
		$S$ =	fraction of bodies that fall under active removal systems $\approx 0$

$\approx -5.6 \times 10^{-3}$

C = “collision” coefficient (it is “modelled” in a complex way, both by means of technical considerations, Kinetic theory of gases, and of experimental data)

## MODEL FOR THE EVOLUTION OVER TIME OF TWO POPULATIONS OF SPACE BODIES

(SATELLITES – S – AND DEBRIS – F)  
big objects
small objects

$$\begin{cases} \frac{dN_s}{dt} = A_s - B_s N_s - C_{S1} N_s^2 - C_{S2} N_s N_f \\ \frac{dN_f}{dt} = A_f - B_f N_f + C_{F1} N_s^2 + C_{F2} N_s N_f + C_{F3} N_f^2 \end{cases}$$

In this case, one can view the problem as an interaction between two populations of animals that are, however, cannibals i.e., they are self-destructive populations both subject to “hunt” and to repopulation by an external agent.

One population can be seen as “prey” satellites, and the other as “predator” debris.

The preys-satellites are those bigger than a certain threshold, and they are hunted by the predator-debris, which are smaller. However, the species are cannibals i.e., there can be interaction between elements of the same species: debris have as preys not only the bigger satellites, but also the debris themselves. At the same time, bigger satellites can destroy “one of their own”, but not a debris. Moreover, both species are subject to “hunting” by the Earth’s atmosphere that acts upon them, and a deposition term is present in both of the species equations. This term will depend on the human activity of orbit launch.

# MODELLO EPIDEMIOLOGICO (KERMACK, MCKENDRICK: 1927)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kSI & , S(0) = S_0 > 0 \\ \frac{dI}{dt} = kSI - hI & , I(0) = I_0 > 0 \\ \frac{dR}{dt} = hI & , R(0) = R_0 > 0 \end{cases}$$

## IPOTESI:

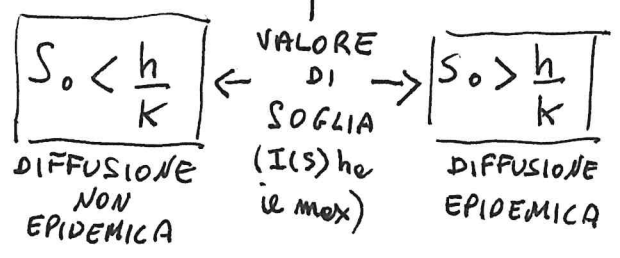
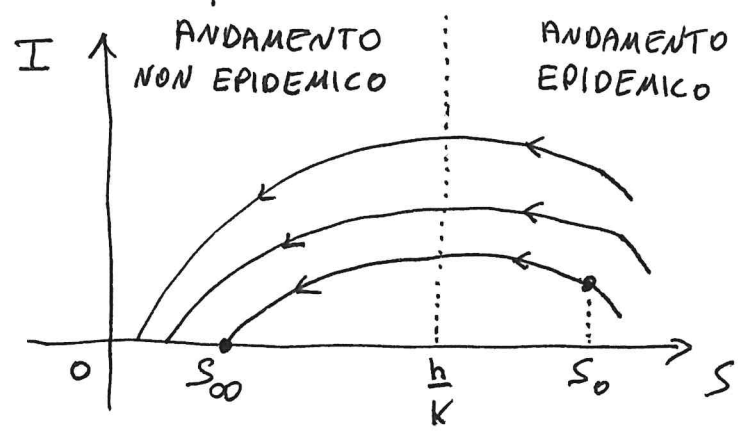
- 1) il contagiato diviene subito un infettivo;
- 2) la malattia conferisce immunità;
- 3)  $N = S + I + R = \text{costante}$ , cioè si trascurano le nascite, le morti per altre cause ed i flussi migratori.

Le prime 2 eqz. non dipendono da R: allora possono essere risolte separatamente, dividendo ad esempio la seconda per la prima (si suppone che S e I siano  $\neq 0$ ):

$$\frac{dI}{dS} = \frac{I(kS - h)}{-kSI} \Rightarrow \frac{dI}{dS} = -1 + \frac{h}{kS} \Rightarrow dI = \left[-1 + \frac{h}{kS}\right] dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(S) = -S + \frac{h}{k} \log S + C \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Per le c.i.: } I_0 = -S_0 + \frac{h}{k} \log S_0 + C \Rightarrow \\ \Rightarrow C = I_0 + S_0 - \frac{h}{k} \log S_0 \end{array} \right.$$

In definitiva si ottiene il seguente andamento:



Notiamo che:

$$\frac{dI}{dt} > 0 \text{ se } I(kS - h) > 0, \text{ cioè, se } kS - h > 0 \Rightarrow S > \frac{h}{k}$$

In altri termini, si parla di andamento o diffusione epidemica se  $I(t)$  è crescente; se, invece,  $I(t)$  è decrescente, allora abbiamo un non-epidemia.

# EPIDEMIOLOGICAL MODEL

(Kermack, McKendrick: 1927)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kSI & , S(0) = S_0 > 0 \\ \frac{dI}{dt} = kSI - hI & , I(0) = I_0 > 0 \\ \frac{dR}{dt} = hI & , R(0) = R_0 > 0 \end{cases}$$

## HYPOTHESIS

- 1) The infected immediately becomes contagious;
- 2) The disease gives immunity
- 3)  $N = S + I + R = \text{constant}$  i.e., births, deaths (for other causes) and migratory flows are disregarded

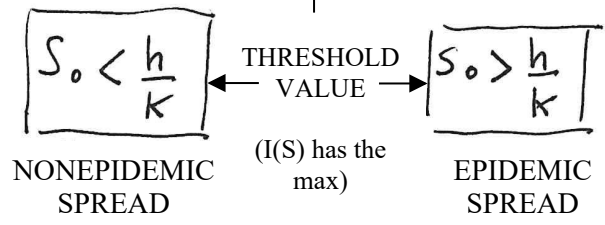
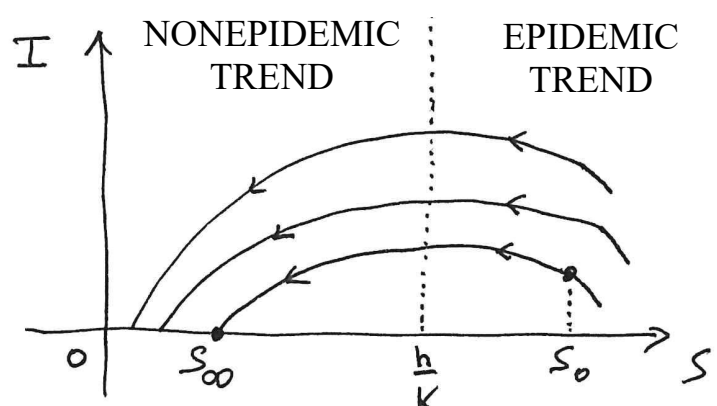
The first two equations do not depend on R: therefore, they can be solved separately e.g., by dividing the second by the first (assuming that S and I  $\neq$  0):

$$\frac{dI}{dS} = \frac{I(kS - h)}{-kSI} \Rightarrow \frac{dI}{dS} = -1 + \frac{h}{kS} \Rightarrow dI = \left[-1 + \frac{h}{kS}\right] dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(S) = -S + \frac{h}{k} \log S + c$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{let le c.I.: } I_0 = -S_0 + \frac{h}{k} \log S_0 + c \Rightarrow \\ \Rightarrow c = I_0 + S_0 - \frac{h}{k} \log S_0 \end{array} \right.$

Ultimately, the following trend is obtained:



**Please note that:**

$$\frac{dI}{dt} > 0 \text{ se } I(kS - h) > 0,$$

c'est, se

$$kS - h > 0 \Rightarrow S > \frac{h}{k}$$

In other terms, there is an epidemic trend or epidemic spread if I(t) is increasing. On the contrary, if I(t) is decreasing, this means that the epidemic has been overcome

→ (non c'è) (cioè, un andamento epidemico della malattia infettiva)<sub>2</sub>  
 Perché ci sia un'infezione deve accadere che

$$S_0 > \frac{h}{K} \Rightarrow \left[ \frac{S_0 K}{h} \right] > 1 \Rightarrow R_0 > 1$$

$$\rightarrow \left( S_0 < \frac{h}{K} \Rightarrow R_0 < 1 \right)$$

definiamo queste quantità:

$$R_0 = \frac{S_0 K}{h} \begin{cases} \text{BASIC} \\ \text{REPRODUCTION} \\ \text{NUMBER} \end{cases}$$

Notiamo che  $R_0$  può essere stimato (si veda la tabella) e queste stime si riferiscono ad una popolazione mixta di coperture vaccinale.

numero di riproduzione netta della malattia

tasso riproduttivo delle infezioni nella popolazione

è un indicatore del massimo potenziale di diffusione della malattia

Se però noi vacciniamo una parte  $p$  della popolazione (cioè, una "proporzione"  $p$ , minore di 1, delle persone vaccinate), ed esempio, se  $p = 0.3$  questo significa che viene vaccinato il 30% della popolazione),

questo modifica  $S_0$  che diventa  $(1-p)S_0$ . Allora, in questo caso, cioè vaccinando una parte  $p$  della popolazione (da definire) non avremo un'epidemia se

$$(1-p)S_0 < \frac{h}{K} \Rightarrow (1-p)S_0 \frac{K}{h} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-p)R_0 < 1 \Rightarrow R_v < 1$$

è la condizione per eliminare un'infezione, cioè per non far "dilogare" le malattie

definiamo queste quantità  $R_v$ : numero di riproduzione effettivo (REAL REPRODUCTION NUMBER)

allora, dato che noi conosciamo sulle base di dati sperimentali (pre-vaccination era possibile stimare la copertura vaccinale e l'infezione:

questo numero, in pratica, rappresenta in media quanti individui può infettare ogni contagiato: ed esempio

INFEZIONE	"PRIMA" ARTICOLO	BOOK BARNE FULFONI
INFEZIONE	$R_0$	$R_0$
VAILOLO	5-7	4
MORBILLO e PERTOSSE (BOOK)	12-18	16-18
INFLUENZA (UN CERPO)	2	3-4
PAROTITE ("ORECCHIONI")	4	
VARICELLA		10-12

i valori di  $R_0$ , necessari per originare

→ (not to have) (i.e., an epidemic trend of the contagious disease)

In order to have an infection, it must happen that

$$S_0 > \frac{h}{K} \Rightarrow \left( \frac{S_0 K}{h} \right) > 1 \Rightarrow R_0 > 1$$

$$\rightarrow \left( S_0 < \frac{h}{K} \Rightarrow R_0 < 1 \right)$$

Defining this quantity:

$$R_0 = \frac{S_0 K}{h} \left\{ \begin{array}{l} \text{BASIC} \\ \text{REPRODUCTION} \\ \text{NUMBER} \end{array} \right.$$

net reproduction number of the disease

reproductive rate of infection in the population

it is an indicator of the maximum disease spread potential

N.B. It is explained in paper nr.3

Basically, this number represents, on average, how many individuals a contagious individual can infect

For example

	Article "Prisma"	Book Barnes, Fulford
Infection	$R_0$	$R_0$
Smallpox	5 - 7	4
Measles and pertussis (book)	12 - 8	16 - 18
Flu (a strain of)	2	3 - 4
Mumps	4	
Chickenpox		10 - 12

We observe that  $R_0$  can be estimated (see the table) and these estimates are referred to a population **without** vaccine coverage.

However, if we give the vaccine to part  $p$  of the population (i.e., a "proportion"  $p$  (→ fraction of vaccinated people) smaller than 1, of the population: for instance, if  $p=0.3$  this means that 30% of the population gets the vaccine), this modifies  $S_0$  that becomes  $(1-p)S_0$ . Therefore, in this case i.e., by vaccinating a part  $p$  of the population (to be defined) **there won't be an epidemic if**

$$(1-p)S_0 < \frac{h}{K} \Rightarrow (1-p)S_0 \frac{K}{h} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-p)R_0 < 1 \Rightarrow R_v < 1$$

is the condition in order to remove the infection i.e., so as not to spread the disease

Defining this quantity  $R_v$ :  
REAL REPRODUCTION NUMBER

Since based on experimental data (pre-vaccination era) we know the values of  $R_0$ , we can estimate the vaccine coverage required to curb the infection:



# L'ATTRATTORE DI LORENZ (1917-2008)

IL TESTO E' TRATTO DA: G. BORGIOLO, "MODELLI MATEMATICI DI EVOLUZIONE ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI", pp. 86-88, Ed. CELID, 1986.

Concludiamo questo capitolo, accennando al modello matematico sicuramente più celebre fra quanti, in dinamica non lineare, manifestano comportamenti caotici. Questo modello, dovuto a E.N. Lorenz (1963), è costituito da un semplice sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine, autonome, che presentano non linearità di tipo quadratico (come, ad esempio, nel modello preda-predatore). Il fenomeno fisico descritto è quello della convezione termica di un fluido incompressibile, viscoso, in una regione piana (cella) rettangolare, disposta verticalmente (Fig. 4.19).

Il sistema di equazioni ordinarie è ottenuto a partire dal modello "esatto", costituito da un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali (equazioni di Navier-Stokes), dove le incognite sono il campo di velocità del fluido, la temperatura, etc., sviluppando le funzioni incognite in serie di Fourier e troncando la serie.

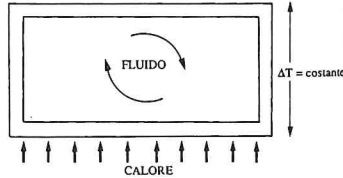


Fig. 4.19

Le equazioni a derivate parziali si trasformano in equazioni ordinarie, dove le nuove incognite sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier fino all'ordine considerato. Il fatto di trascurare i termini (infiniti) successivi ad un certo ordine è legato all'aspettativa che la soluzione (eventualmente dopo un periodo

transitorio) oscilla solo secondo alcuni modi di vibrazione, essendo gli altri sostanzialmente trascurabili. Il modello di Lorenz ha la forma seguente:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma(X - Y) \\ \dot{Y} = RX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad (4.29)$$

$X$  è il coefficiente del primo termine dello sviluppo della corrente (funzione scalare, che nell'ipotesi di un sistema piano, invariante rispetto alla terza coordinata spaziale, sostituisce il campo vettoriale di velocità);  $Y$  è il primo coefficiente nello sviluppo della temperatura e  $Z$  descrive l'andamento verticale della temperatura stessa; i coefficienti  $\sigma$  (numero di Prandtl) e  $R$  (numero di Reynolds adimensionale) caratterizzano le proprietà fisiche del fluido, mentre  $b$  è legato alle caratteristiche geometriche della cella. Nelle aspettative di Lorenz (e di chi lo aveva preceduto nell'opera di ottenere modelli approssimati dalle equazioni di Navier-Stokes) la (4.29) doveva costituire un modello "semplice" per lo studio dei moti convettivi nell'atmosfera e, quindi, un passo importante sulla strada da percorrere per avere previsioni del tempo "deterministiche".

Per un'analisi approfondita delle proprietà del sistema (4.29) rimandiamo a [22, Cap. 11], limitandoci qui a segnalare che, oltre alla soluzione di equilibrio  $(0, 0, 0)$ , si possono facilmente determinare altre due soluzioni di equilibrio e, fissati  $\sigma$  e  $b$ , si possono studiare le rispettive proprietà di stabilità al variare di  $R$  (valori crescenti di  $R$  indicano, ad esempio, un gradiente termico crescente fra le due facce orizzontali della cella e, quindi, un notevole flusso convettivo). Per valori di  $R \approx 28$  tutte le soluzioni di equilibrio sono instabili e, per tutte le soluzioni di evoluzione considerate, si è osservata un'estrema sensibilità rispetto ai dati iniziali (si allontanano esponenzialmente l'una dall'altra). Tuttavia, per tutte le condizioni iniziali prese in esame, l'evoluzione porta asintoticamente verso una regione invariante dello spazio delle fasi  $(X, Y, Z)$ , dalla struttura geometrica estremamente complessa (cosiddetta frattale), che è stata identificata come l'attrattore caotico di Lorenz (detto "ad ali di farfalla" per la sua forma). Le conseguenze di questo risultato sulla possibilità di predire uno stato successivo del sistema, con una precisione prefissata, sono alquanto catastrofiche, poiché, come detto, l'incertezza (ovvero l'errore di misura) sullo stato iniziale si propaga, con crescita esponenziale nel tempo, sugli stati successivi. Le implicazioni di ciò

AD ESEMPIO:  
 $R=28$   
 $\sigma=10$   
 $b=\frac{8}{3}$   
 OPPURE  
 $R=15$   
 $\sigma=5$   
 $b=1$

sulle previsioni del tempo, assumendo che la reale turbolenza dell'aria abbia la stessa sensibilità ai valori iniziali, sono state discusse da Lorenz in lavori del 1963 e 1964. In Fig. 4.20 riportiamo la proiezione dell'attrattore sul piano  $(X, Y)$  realizzata con PHASER, [14].

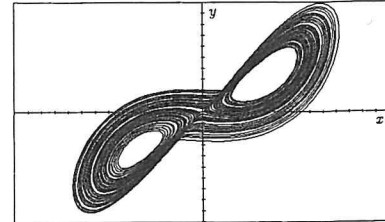
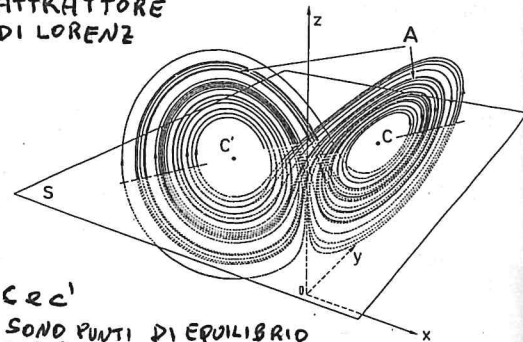


Fig. 4.20

Riassumiamo alcuni aspetti caratterizzanti i sistemi di equazioni differenziali non lineari, ricordando, prima di tutto, che, in generale, non è possibile ottenere esplicitamente (ovvero in termini di funzioni elementari) la soluzione di un PVI per un sistema non lineare. Una volta appurata l'esistenza ed unicità della soluzione (vedi Cap. 5) lo studio di tipo qualitativo, sia con metodi matematici rigorosi, sia mediante simulazioni numeriche, diventa quindi l'unico approccio possibile per conoscerne le proprietà. Fra le caratteristiche più interessanti, rilevabili già per sistemi a dimensione 2, ricordiamo la possibilità di avere soluzioni periodiche asintotiche (cicli limite) anche per sistemi non forzati (equazione di Van der Pol). Le soluzioni di tipo caotico possono presentarsi a partire dalla dimensione 3 (equazione del pendolo forzato, equazione di Duffing, modello di Lorenz). Abbiamo voluto presentare, in modo sommario e del tutto fenomenologico, anche questo aspetto della dinamica non lineare, divenuto di gran moda in tempi recenti, per completarne, in qualche modo, il quadro. Al riguardo osserviamo come, in sistemi completamente deterministici (ad ogni possibile dato iniziale corrisponde una ed una sola soluzione), si abbia, di fatto, la crisi di tale determinismo quando siano presenti soluzioni caotiche: l'errore di misura commesso sulle condizioni iniziali si propaga con grande rapidità e non è possibile fare previsioni certe sullo stato del sistema per tempi lunghi.

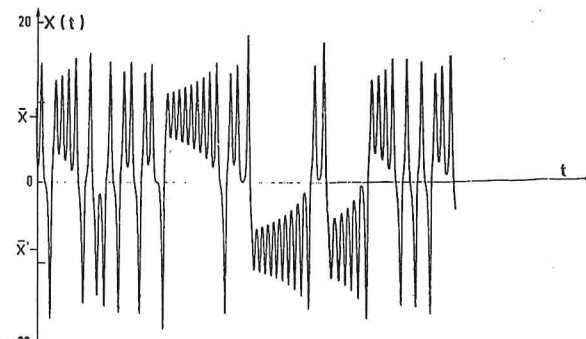
ATTRATTORE DI LORENZ



← FIGURE TRATTE DA A. VULPIANI, "DETERMINISMO E CAOS", ED. CAROCC 2004.

CRC' SONO PUNTI DI EQUILIBRIO INSTABILI

$x(t)$  in funzione di  $t$  per il modello di Lorenz con  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  ed  $r = 28$



# LORENZ ATTRACTOR (1917-2008)

Text translated from: G.BORGIOLI "modelli matematici di evoluzione ed equazioni differenziali" pp. 86-88, ED. CELID, 1996

We will look at one of the best-known mathematical models in nonlinear dynamics that show instances of chaotic behavior. Thanks to E.N.Lorenz's theorization, this model is a simple system of three autonomous first-order differential equations that exhibit quadratic non-linearity (as in the predator-prey model, for instance). The physical phenomenon described is the thermal convection of an incompressible, viscous fluid in a rectangular plane region (cell) positioned vertically (Fig.4.19).

The system of ordinary equations is obtained by starting from the "exact" model, which is built from a system of partial differential equations (the Navier-Stokes equations), where the variables (unknowns) include the velocity field of the fluid, temperature, etc. By applying a Fourier series expansion to the unknown functions and truncating the series, the system is derived.

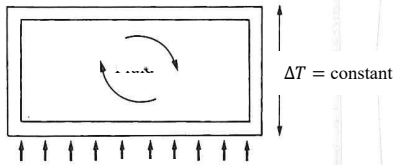


Fig.4.19

The partial differential equations are transformed into ordinary equations, where the unknowns are the coefficients of the Fourier expansion up to the considered order. In this case, we disregard the (infinite) terms beyond a certain order because we expect the solution (eventually, after a transient period) to oscillate only according to certain vibrational modes, while the remaining ones are essentially negligible.

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma(X - Y) \\ \dot{Y} = RX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad (4.29)$$

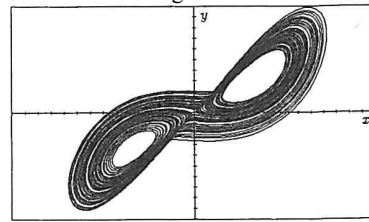
$X$  is the coefficient of the first term for flow development (a scalar function that, under the assumption of a plane system invariant with respect to the third spatial coordinate, replaces the velocity vector field);  $Y$  is the first coefficient for temperature development, and  $Z$  describes temperature's vertical pattern. The coefficients  $\sigma$  (the Prandtl number) and  $R$  (the dimensionless Reynolds number) characterize the physical properties of the fluid,  $b$  is a parameter related to the geometric characteristics of the cell.

According to Lorenz's expectations (and those who preceded him in attempting to derive approximate models of the Navier-Stokes equations), equation (4.29) was supposed to be a "simple" model for studying atmospheric convection motions and, therefore, an important milestone in the development of "deterministic" weather forecasts.

For an extensive analysis of the properties of the system (4.29) (see 22, Chapter 11), aside from the equilibrium solution  $(0, 0, 0)$ , one can easily determine other two additional equilibrium solutions. Keeping  $\sigma$  and  $b$  fixed, one can study their respective stability properties at the variation of  $R$  (increasing values of  $R$  correspond, for instance, to a greater thermal gradient between the two horizontal faces of the cell, leading to a more significant convective flow). For values  $R \cong 28$ , all equilibrium solutions become unstable, and for all the considered evolution solutions, an extreme sensitivity with reference to the initial data was observed (they exponentially move away from each other). However, for all the initial conditions considered, the evolution asymptotically converges to an invariant region of the phase space  $(X, Y, Z)$ . This region exhibits an extremely complex geometric structure (known as **fractal**) and has been identified as the **chaotic Lorenz attractor** (often referred to as "butterfly wings" due to its characteristic shape). The consequences of this result for predicting a later stage of the system with fixed precision are rather catastrophic since, as mentioned earlier, the uncertainty (measurement error) in the initial state spreads to later stages with exponential growth over time.

The resulting implications on weather forecasts, assuming that real air turbulence exhibits the same sensitivity to initial values, were discussed by Lorenz in his works from 1963 and 1964. In fig. 4.20 you can see the projection of the attractor onto the plane  $(X, Y)$  generated using PHASER [14].

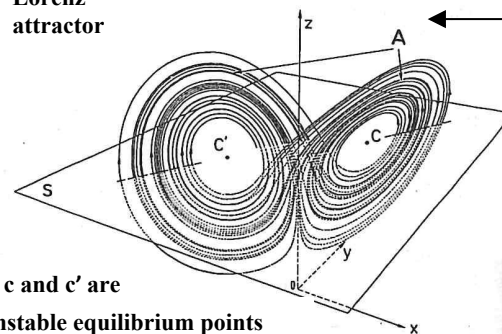
Fig. 4.20



Some of the most defining aspects of nonlinear differential equations include the following: First, in general, it is not possible to explicitly obtain the solution of an initial value problem (IVP) for a nonlinear system in terms of elementary functions. Once the existence and uniqueness of the solution are established (see Chapter 5), a qualitative approach becomes the only viable method for understanding its properties, using both rigorous mathematical analysis and numerical simulations, among the most interesting characteristics, already observable in two-dimensional systems, is the possibility of periodic asymptotic solutions (limit cycles), even in unforced systems (Van der Pol equation). Solutions of chaotic type can appear starting from dimension 3 (equation of forced pendulum, Duffing equation, Lorenz model).

This aspect of nonlinear dynamics has gained increasing popularity in recent times and has been presented here in a purely phenomenological manner. In this context, we observe that even in completely deterministic systems (to each possible initial data corresponds one and only one solution), determinism itself faces a crisis when chaotic solutions arise. Specifically, measurement errors in the initial conditions spread rapidly, making it impossible to achieve exact long-term predictions about the system's state.

Lorenz attractor



Figures taken from A.Vulpiani "Determinismo e Caos", Ed.Carocci, 2004

$X(t)$  as a function of  $t$  for the Lorenz model with  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  and  $r=28$

For example:

$R=28$

$\sigma=10$

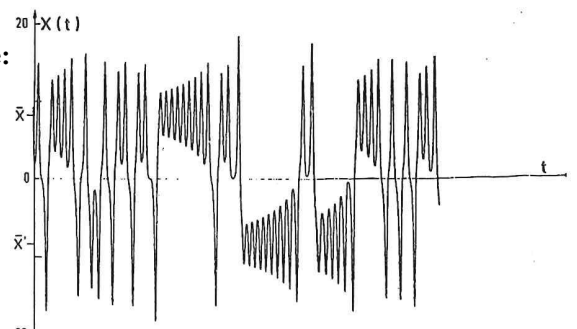
$b=\frac{8}{3}$

or

$R=15$

$\sigma=5$

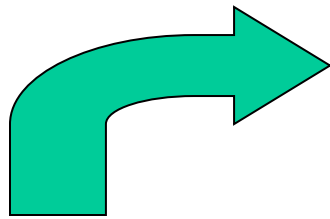
$b=1$



# Partial Differential Equations: PDEs

PDEs  $\Rightarrow$  infinite soluzioni

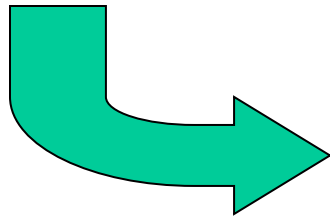
PDEs + condizioni complementari  $\Rightarrow$  una sola soluzione  
(sotto condizioni di regolarità per le funzioni incognite)



condizioni iniziali + condizioni al contorno  
per le equazioni iperboliche e paraboliche  
(i.e., **diffusion equation**, **wave equation**)

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x, t)$$

condizioni  
complementari



condizioni al contorno  
per le equazioni ellittiche  
(i.e., **Poisson equation** and **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = 0$$

# Partial Differential Equations: PDEs

PDEs  $\Rightarrow$  infinite solutions

PDEs + complementary conditions  $\Rightarrow$  one solution only  
(under regularity conditions for the unknown functions)

initial conditions + boundary conditions  
for hyperbolic and parabolic equations  
(i.e., **diffusion equation**, **wave equation**)

complementary  
conditions

$$t \quad \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x, t)$$

boundary conditions  
for elliptic equations  
(i.e., **Poisson equation** and **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = 0$$

# Partial Differential Equations: PDEs

condizioni iniziali + condizioni al contorno  
per le equazioni iperboliche e paraboliche  
(i.e., **diffusion equation**, **wave equation**)

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$$



Nasce da un bilancio termico, se  $T$  è la temperatura, e si chiama anche heat equation o Fourier's equation.  
Se  $T$  è la concentrazione, descrive la diffusione di una sostanza diluita (gas o liquido) in una fase disperdente omogenea: è il caso tipico delle soluzioni. Allora si chiama Fick's equation ed al posto della diffusività termica ( $k/(\rho c)$ ) c'è la diffusività di massa.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x, t)$$



Rappresenta fenomeni vibratorii, onde che si propagano. Fu trovata da D'Alembert per le corde vibranti. Descrive onde trasversali di piccola ampiezza in una corda, in una membrana elastica, onde sonore ed anche onde elettromagnetiche nel vuoto.

# Partial Differential Equations: PDEs

initial conditions + boundary conditions  
for hyperbolic and parabolic equations  
(i.e., **diffusion equation**, **wave equation**)

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$$



It arises from a thermal balance when  $T$  is temperature. It is commonly known as heat equation or Fourier equation.

If  $T$  represents concentration, it describes the diffusion of a diluted substance (gas or liquid) in an homogeneous dispersing phase, which is typical in solutions. In this case, it is referred to as Fick's equation, where mass diffusivity replaces thermal diffusivity ( $k/(\rho c)$ ).

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x, t)$$



It represents vibratory phenomena, waves that propagate. It was discovered by D'Alembert vibrating strings.

This equation describes transverse waves of small amplitude in a string, waves in an elastic membrane, sound waves and also electromagnetic waves in a vacuum.

# Partial Differential Equations: PDEs

condizioni al contorno

per le equazioni ellittiche

(i.e., **Poisson equation** and **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = 0$$



Rappresenta la versione non omogenea dell'equazione di Laplace. Può descrivere una membrana su cui agisce una densità di forza, un campo termico con sorgente, un campo elettrico in presenza di una densità di carica (è importante in vari problemi di elettrostatica, come pure la sua versione omogenea).

Si chiama anche equazione del Potenziale. Può fornire soluzioni statiche (stazionarie: la soluzione non dipende più dal tempo) dell'equazione di D'Alembert o dell'equazione del calore. Può descrivere campi termici stazionari, problemi di elettrostatica piana, moti piani di fluidi perfetti incompressibili.

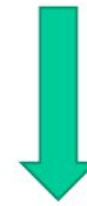
# Partial Differential Equations: PDEs

boundary conditions

for elliptic equations

(i.e., **Poisson equation** and **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = 0$$



It represents the non-homogeneous version of the Laplace equation. It can describe a membrane subject to a force density, a thermal field with source, an electric field in the presence of a charge density (it is important in many electrostatic problems, just as its homogeneous version is)

It is also known as potential equation. It can yield static solutions (stationary: solution that no longer depends on time) of the D'Alembert equation or the heat equation. It can describe stationary thermal fields, electrostatics problems in 2-D, 2-D motions of perfect incompressible fluids.



# Variabile Casuale (Aleatoria)

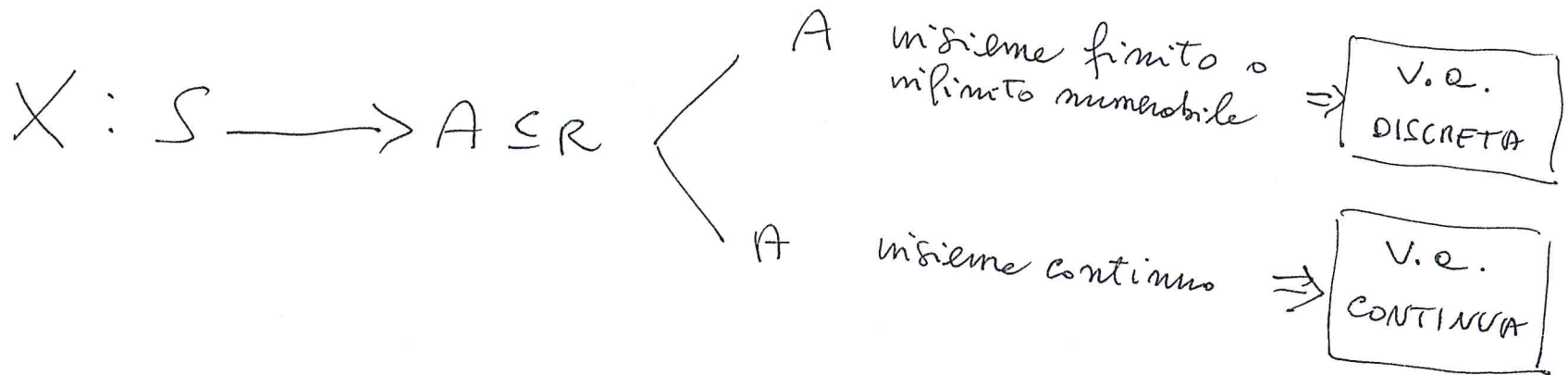
Definizioni, osservazioni e  
principali proprietà

# Random Variable (Aleatory)

Definitions, observations and main properties

# VARIABILE CASUALE (ALEATORIA)

→ UNA PRIMA DEFINIZIONE:



→ V. e. DISCRETA:

$$P(X=x) = f(x)$$

FUNZIONE  
DI  
PROBABILITA'

$$\begin{cases} f(x_i) \geq 0 \\ \sum_i f(x_i) = 1 \end{cases}$$

$$P(X \leq x) = F(x)$$

FUNZIONE  
DI  
DISTRIBUZIONE  
CUMULATIVA

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

## Definizione

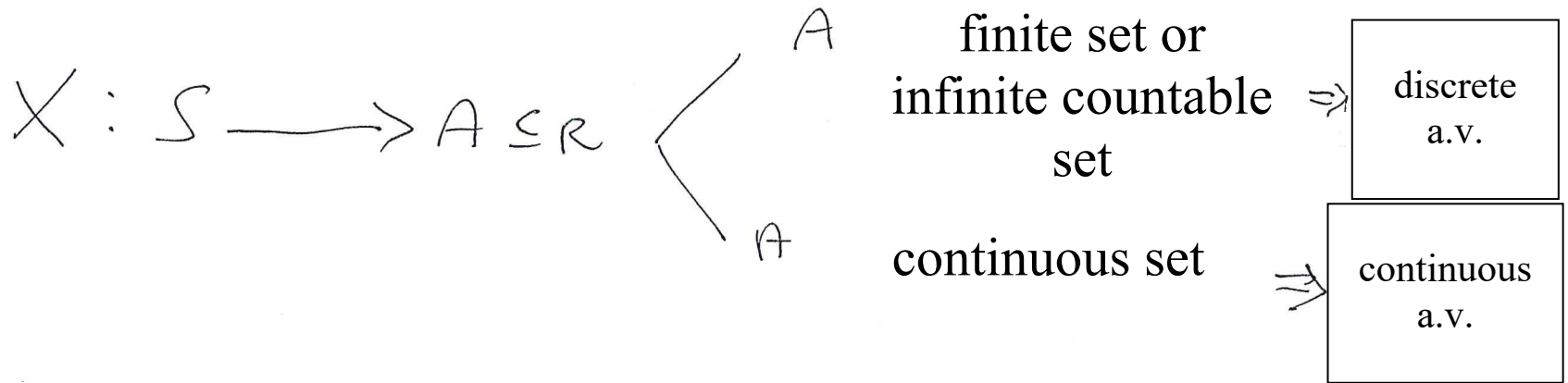
Una variabile aleatoria è dunque un numero che viene assegnato, mediante una determinata regola, a ciascun punto dello spazio campione, ovvero a ciascuno degli esiti possibili di un esperimento aleatorio.

$F(x)$  si chiama anche funzione di ripartizione della v.a.  $X$  (si usa la notazione  $X \sim F$ ) ed esprime la probabilità che  $X$  assuma un valore  $\leq x$ .  
Questa definizione vale anche per v.a. continue. Si noti che tutte le questioni di probabilità inerenti ad una v.a., ammettono una risposta in termini della sua  $F$ .

# RANDOM VARIABLE (ALEATORY)



## A FIRST DEFINITION:



discrete a.v.

$P(X=x) = f(x)$

PROBABILITY FUNCTION

$$\begin{cases} f(x_i) \geq 0 \\ \sum_i f(x_i) = 1 \end{cases}$$

$P(X \leq x) = F(x)$

CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

### Definition

An aleatory variable is therefore a number that is assigned to each point of the sample space i.e., to each of the possible outcomes of an aleatory experiment, by means of a specific rule.

$F(x)$  is also called distribution function of the a.v.  $X$  (denoted as  $X \sim F$ ) and it represents the probability that  $X$  adopts a value  $\leq x$ .

This definition is also valid for continuous a.v.

Additionally, note that all probability-related problems involving an a.v. can be solved in terms of its distribution function  $F$ .

# INDICI CARATTERISTICI DI UNA VARIABILE CASUALE

È UN VALORE ATTESO (MEDIO) INDICE DI POSIZIONE (Expectation o Expected Value)

(rappresenta il valore previsto che si potrà ottenere in un gran numero di prove)

$E(X) =$   
 Si definisce spesso con  $\mu$   
 misura  $\geq 0$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} x_i \cdot P(X=x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \cdot f(x_i)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

SI DEFINISCE ANCHE:  
 ASPETTATIVA  
 o  
 MEDIA o SPERANZA MATEMATICA  
 se  $\begin{cases} \text{V.O.} \\ \text{DISCRETA} \end{cases}$

(nella teoria delle misure  $\mu$  è detto VALORE DI MISURA)  
 dove  $X$  v.a. è una misura di un parametro fisico

È UN VARIANZA INDICE DI VARIABILITÀ

(indica quanto sono "dispersi" i valori della v.e. relativamente al suo valor medio)

$Var(X) =$   
 misura  $\geq 0$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X=x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

N.B.:  
 $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$   
 DEVIATIONE STANDARD DELLA V.O. X

Nelle teorie delle misure  $\sigma$  è detto INCERTEZZA DELLA MISURA  
 ← SCARTO QUADRATICO MEDIO

NOTIAMO CHE:

- $Var(X) = E((X - \mu)^2)$
  - $Var(X) = E(X^2) - \mu^2$
  - $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- ovvero  $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

# CHARACTERISTIC INDEXES OF A RANDOM VARIABLE

## EXPECTATION (MEAN)

or  
EXPECTED VALUE

IT IS A POSITION INDEX

(it represents the expected value that can be obtained in a large number of tests)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X=x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i f(x_i) \quad \text{if } \left\{ \begin{array}{l} \text{DISCRETE} \\ \text{A.V.} \end{array} \right.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{if } \left\{ \begin{array}{l} \text{CONTINUOUS} \\ \text{A.V.} \end{array} \right.$$

IT IS ALSO DEFINED AS:  
EXPECTATION, MEAN OR  
MATHEMATICAL EXPECTATION

it is often expressed with  $\mu$   
(in **measure theory**  $\mu$  is referred to as MEASURED VALUE)

where X a.v. is a measurement of a physical parameter

IT IS A  
VARIABILITY  
INDEX

## VARIANCE

(it indicates how "dispersed" the values of the a.v. relatively to its mean value are)

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 P(X=x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 f(x_i) \quad \text{if } \left\{ \begin{array}{l} \text{DISCRETE} \\ \text{A.V.} \end{array} \right.$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad \text{if } \left\{ \begin{array}{l} \text{CONTINUOUS} \\ \text{A.V.} \end{array} \right.$$

it can be  $\geq 0$

in measure theory it is referred to as **MEASUREMENT UNCERTAINTY**

CONTINUOUS  
A.V.

ROOT-MEAN-SQUARE  
DEVIATION

N.B.:  
 $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$   
STANDARD  
DEVIATION OF  
A.V. X

WE NOTICE THAT:

$$\rightarrow \text{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$$

$$\rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$\rightarrow \text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$$

that is:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$